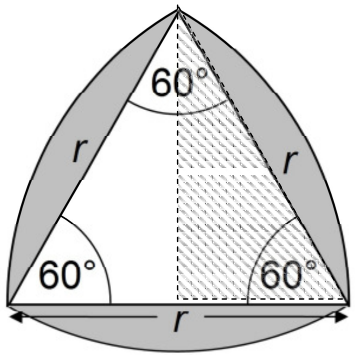
1

Drei Kreise



Bestimmt den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

Lösungsvorschlag:

Die schraffierte Figur besteht aus einem gleichseitigen Dreieck A_1 (r = 3 cm) und drei Kreisabschnitten A_2 (grau gezeichnet). Damit berechnet sich die Gesamtfläche:

$A = A_1 + 3 \cdot A_2$

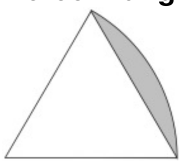
Berechnung von A_1:
Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck gilt (Pythagoras):

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot r^2}{4} - \frac{r^2}{4} = \frac{3 \cdot r^2}{4} \Rightarrow h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$A_1 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}\ .$$

Berechnung von A_2: Wir ziehen von einem Kreisausschnitt (siehe links) die Fläche A_1 ab:



$$A_2 = \frac{60}{360} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$A = A_1 + 3 \cdot A_2 = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} r^2 \pi - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} r^2 \pi - 2 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{r^2}{2}\pi - \frac{r^2}{2}\sqrt{3} = \frac{r^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{3^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \approx 6{,}34$$

Der Flächeninhalt beträgt 6,34 cm^2.

2

Fahrrad

Berechnet die Anzahl der Radumdrehungen auf eurem Schulheimweg.

Lösungsvorschlag:

Der Heimweg hier sei drei Kilometer. Ein Zoll entspricht 2,54 cm. Ein 28-Zoll-Fahrrad, hat demnach einen Durchmesser von ca. 71,12 cm.

Die Anzahl der Umdrehungen *n* ergibt sich aus der gesamten Wegstrecke *s* geteilt durch den Radumfang *u*:

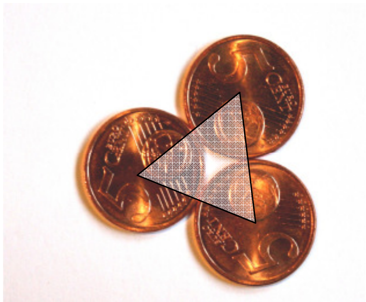
$$n = \frac{s}{u} = \frac{s}{2r\pi} = \frac{3000m}{0{,}7112m \cdot \pi} \approx 1343$$

In der Beispielrechnung drehte sich das Rad ca. 1343 mal.

Dichteste Packung

Belegt einen Teil eures Tisches so dicht wie möglich mit Fünf-Cent-Stücken. Wie viel Prozent der Fläche ist mit Fünf-Cent-Stücken bedeckt? Wäre der Prozentsatz kleiner, wenn man Ein-Cent-Stücke genommen hätte? Wenn ja, um wie viel?

Lösungsvorschlag:



Für unsere Überlegung werden nur drei Münzen benötigt. Es reicht, das hervorgehobene Dreieck zu betrachten. (Die gesamte Ebene lässt sich mit solchen Dreiecken parkettieren.)

d… Durchmesser der Münzen.
r … Radius der Münzen

Berechnung von A_1:

Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck gilt (Pythagoras):

$$h^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4\cdot d^2}{4} - \frac{d^2}{4} = \frac{3\cdot d^2}{4} \Rightarrow h = \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$A_1 = \frac{g\cdot h}{2} = \frac{d\cdot h}{2} = \frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\sqrt{3} = \frac{d^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(2r)^2}{4}\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}\ .$$

Die von den Münzen im Dreieck bedeckte Fläche A_2:

$$A_2 = 3\cdot\left(\frac{60}{360}\cdot r^2\pi\right) = \frac{1}{2}\cdot r^2\pi$$

Bedeckte Fläche in Prozent:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot r^2\pi}{r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 0{,}907 = 90{,}7\%$$

Es sind ca. 90,7% der Fläche bedeckt. Das hängt nicht vom Radius *r* der Münzen ab.

Pizza

Die Pizza hat einen Durchmesser von 28 cm.
Angenommen, ihr habt einen doppelt so großen Hunger.
Welchen Durchmesser müsste die Pizza jetzt haben?

Lösungsvorschlag:

Die Fläche der Pizza beträgt: $A = r^2\pi \approx 651{,}8\ \mathrm{cm}^2$.

Ein doppelter Hunger erfordert die doppelte Pizzafläche, also beträgt die gewünschte Fläche:
$A_{neu} = 2\cdot A = 2\cdot r^2\pi \approx 1231{,}5\ \mathrm{cm}^2$.

Es gilt:

$$A_{neu} = r_{neu}{}^2\pi \Leftrightarrow r_{neu}{}^2 = \frac{A_{neu}}{\pi} \Rightarrow r_{neu} = \sqrt{\frac{A_{neu}}{\pi}} = \sqrt{\frac{1231{,}5\ \mathrm{cm}^2}{\pi}} \approx 19{,}8\ \mathrm{cm}$$

Rechenalternative:

$$A_{neu} = r_{neu}{}^2\pi \Leftrightarrow r_{neu}{}^2 = \frac{A_{neu}}{\pi}$$

$$\Rightarrow r_{neu} = \sqrt{\frac{A_{neu}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\cdot r^2\pi}{\pi}} = r\sqrt{2} = 14\ \mathrm{cm}\cdot\sqrt{2} \approx 19{,}8\ \mathrm{cm}$$

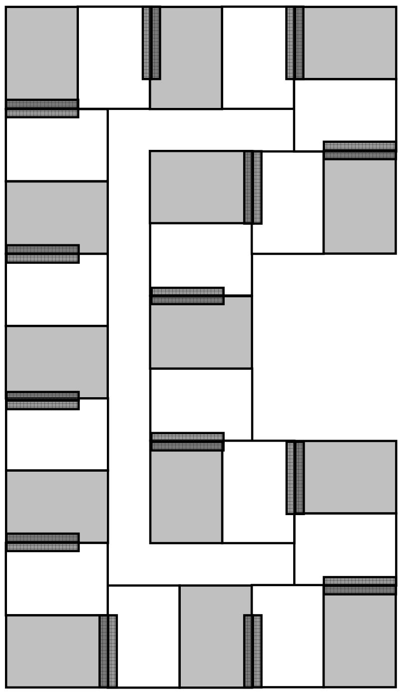
Bemerkung (zweite Rechenalternative): Sind die Eigenschaften von zentrischen Streckungen bekannt, kann man auch unmittelbar einen Streckfaktor von $k = \sqrt{2}$ folgern.

Die Pizza müsste jetzt einen Durchmesser von ca. 39,6 cm (doppelter Radius) haben.

5

Domino

Wenn ihr alle Steine richtig aneinanderlegt, ergibt sich folgende Lösungsfigur:



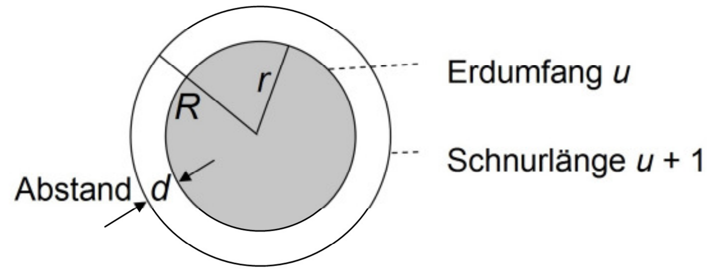
6

Schnur um den Äquator

Stellt euch vor, um eine glatte Kugel von der Größe der Erde (r = 6370 km) sei ein (nicht dehnbares) Seil um den Äquator gespannt. Dadurch hat es jetzt überall (gleichmäßig) einen kleinen Abstand von der Kugel.

Könnte der abgebildete Wanderer Fridolin sich dazwischen durchklemmen? Oder passt nicht einmal ein Haar (Durchmesser: 0,00005 Meter) von ihm durch?

Lösungsvorschlag:



Für den Erdumfang *u* gilt: $u = 2\pi \cdot r$. Auflösen nach dem Radius r ergibt: $r = \frac{u}{2\pi}$

Für die Schnurlänge *u* + 1 gilt entsprechend:

$u + 1 = 2\pi \cdot R \quad bzw. \quad R = \frac{u+1}{2\pi}$. Damit gilt für den Abstand *d*:

$$d = R - r = \frac{u+1}{2\pi} - \frac{u}{2\pi} = \frac{u}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{u}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159 .$$

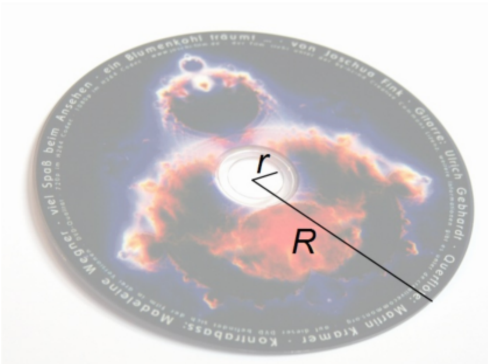
Das Ergebnis $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{m} \approx 0{,}159\,\mathrm{m} = 15{,}9\,\mathrm{cm}$ **ist von der Größe des Planeten unabhängig. (!)**

DVD

Eine Digital Versatile Disc hat einen Außendurchmesser von genau zwölf Zentimetern und hat (auf einer Seite) eine Oberfläche von ca. 111,3 cm^2.

Lässt sich aus diesen Angaben der Innendurchmesser bestimmen?

Lösungsvorschlag:



Der Radius der DVD beträgt $R = 6$ cm.

Die Fläche besteht aus einem Kreisring:

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

Wir lösen diese Gleichung nach der Unbekannten *r* auf:

$$A + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot R^2$$

$$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot R^2 - A$$

$$r^2 = \frac{\pi \cdot R^2 - A}{\pi} = R^2 - \frac{A}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{A}{\pi}} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 - \frac{111{,}3\,\text{cm}^2}{\pi}} \approx 0{,}756\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow d = 2 \cdot r = 2 \cdot 0{,}756\,\text{cm} \approx 1{,}52\,\text{cm}$$

Der Innendurchmesser beträgt ca. = 1,52 cm.

π

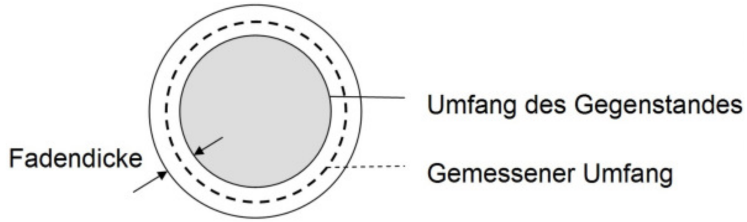
Versucht mit einer Methode eurer Wahl so genau wie möglich π zu bestimmen.

Welche Messfehler gibt es und wie können diese möglichst klein gehalten werden?

Lösungsvorschlag:

Es werden zwei typische Messfehler dargestellt:

Je dicker der Faden (die Schnur), desto ungenauer wird der Messerwert:



Die Länge einer Schnur entspricht nicht dem tatsächlichen Umfang des Gegenstandes. Es wird ein zu großer Umfang gemessen. Je dünner der Faden ist, desto genauer wird die Messung.

Ein weiterer Messfehler ergibt sich aus der Messung der Fadenlänge. (Vergleiche auch Station 6). Bei der Messung macht man (weitgehend unabhängig von der Länge) einen Fehler von ± 1 mm. Je größer der ausgemessene Kreis ist, desto kleiner wird der *relative* Fehler.

Hier die ersten 100 Stellen von π:
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
05820974944592307816406286208998628034825342117067
…

9

Zeiger einer Uhr

Der Minutenzeiger der abgebildeten Uhr ist 13 Millimeter lang, der Stundenzeiger 7 Millimeter.

Welche Fläche überstreicht der Minutenzeiger bis 13:00 Uhr?

Welchen Weg legt die Zeigerspitze dabei zurück?

Lösungsvorschlag:

Der Minutenzeiger überstreicht in 51 Minuten den grau unterlegten Kreisausschnitt A. Der Radius ist durch die Minutenzeigerlänge gegeben: r = 13 mm = 1,3 cm

Berechnung der Fläche *A*:

$$A = \underbrace{\frac{51}{60}}_{\text{Bruchteil des Kreises}} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{ganzer Kreis}} = \frac{51}{60} \cdot \pi \cdot (1{,}3\ \text{cm})^2 \approx 4{,}51\ \text{cm}^2$$

Berechnung des zurückgelegten Weges *s*:

$$s = \underbrace{\frac{51}{60}}_{\text{Bruchteil des Kreises}} \cdot \underbrace{2\pi \cdot r}_{\text{Umfang des ganzen Kreises}} = \frac{51}{60} \cdot 2\pi \cdot 1{,}3\ \text{cm} \approx 6{,}94\ \text{cm}$$

Der Zeiger überstreicht eine Fläche von ca. 4,51 cm² und die Zeigerspitze legt dabei einen Weg von ca. 6,94 cm zurück.

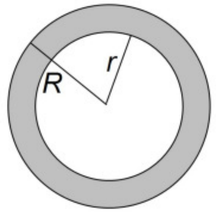
10

Kreisring

Eine Ein-Euro-Münze besitzt einen Ring aus einer Messing-Nickel-Legierung. Betrachtet diesen Ring senkrecht von oben: Wie viel Prozent der Fläche erscheint jetzt in gold-gelber Farbe?

Lösungsvorschlag:

Die Fläche *A* der Messing-Nickel-Legierung besteht aus einem Kreisring mit einem Außendurchmesser von $D \approx 23$ mm = 2,3 cm und einem Innendurchmesser von $d \approx 16$ mm = 1,6 cm. Damit ist $R = 1{,}15$ cm und $r = 0{,}8$ cm.



$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left((1{,}15\ cm)^2 - (0{,}8\ cm)^2\right) \approx 2{,}14\ cm^2$$

$$A_R = \pi \cdot R^2 = \pi(1{,}15\ cm)^2 \approx 4{,}15\ cm^2$$

$$p\% = \frac{A}{A_R} = \frac{2{,}14\ cm^2}{4{,}15\ cm^2} \approx 0{,}516 = 51{,}6\%$$

Alternativ lässt sich der Prozentsatz direkt bestimmen:

$$p\% = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{\pi \cdot R^2} = \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - \left(\frac{0{,}8\ cm}{1{,}15\ cm}\right)^2$$

$$\approx 0{,}516 = 51{,}5\%$$

Der gold-gelbe Flächenanteil beträgt 51,6%.

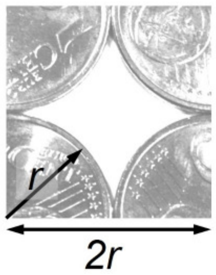
11

Vier Münzen

Vier Münzen (5-Cent-Stücke) werden so zusammengelegt, dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden. Berechnet die Fläche, welche die Münzen einschließen. Bestimmt die Größen, die ihr für die Rechnung braucht.

Zusatz: Bestimmt die gesuchte Fläche in Abhängigkeit vom Radius *r* einer Münze.

Lösungsvorschlag:



Wir betrachten das aus den Mittelpunkten entstandene Quadrat A_Q. Der Durchmesser einer 5-Cent-Münze beträgt ca. 21 mm bzw. der Radius ist r = 10,05 mm = 1,05 cm.

Die gesuchte Fläche erhält man, indem man von der Quadratfläche vier Viertelkreise A_K abzieht:

$$A = A_Q - 4 \cdot A_K$$

Für den Flächeninhalt des Quadrates gilt: $A_Q = (2r)^2 = 4 \cdot r^2$.

Für die Fläche eines Kreisausschnittes A_K gilt: $A_K = \frac{1}{4} \cdot r^2 \pi$.

Damit erhält man für den gesuchten Flächeninhalt A:

$$A = A_Q - 4 \cdot A_K = 4 \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 \pi = 4 \cdot r^2 - r^2 \pi = r^2 (4 - \pi)$$

$$= (1{,}05\,\text{cm})^2 (4 - \pi) \approx 0{,}946\,\text{cm}$$

Die eingeschlossene Fläche beträgt ca. 0,946 cm^2 bzw. 94,6 mm^2

12

Genauer Durchmesser

Der Durchmesser einer Tafelkreide soll mit Hilfe eines dünnen Fadens sehr genau bestimmt werden.
Überlegt euch eine Methode, um den Durchmesser auf $\pm 0{,}1$ mm zu bestimmen

Lösungsvorschlag:

Die Länge des Fadens lässt sich auf ± 1 mm genau bestimmen.
Der Faden wird zehnmal um die Kreide gewickelt und zwar so, dass die einzelnen Windungen dicht nebeneinander liegen, jedoch nicht übereinander.
Bestimmt ihr jetzt die Länge des Fadens auf einen Millimeter genau, so verringert sich der Fehler *pro Windung* auf $\pm 0{,}1$ mm.
(Vergleicht auch Station Nr. 8)

Länge des Fadens *L* ist gleich dem zehnfachen Umfang.

Es gilt: $L = 10 \cdot u = 10 \cdot \pi \cdot 2r$.

Aufgelöst nach *r* ergibt sich: $2r = \frac{L}{10 \cdot \pi} = \frac{422\,mm}{10 \cdot \pi} \approx 13{,}4\,mm$.

Die Beispielrechnung ergibt den Durchmesser 13,4 mm.
Das Ergebnis kann von Kreidestück zu Kreidestück abweichen.

Maximal

Mit der Schnur soll eine möglichst große Fläche umrandet werden. Wie groß ist diese maximal?

Zusatz: Verdoppelt sich der Flächeninhalt, wenn die Länge der Schnur verdoppelt wird?

Lösungsvorschlag:
Der maximale Flächeninhalt wird durch einen Kreis erreicht.

Für den Umfang *u* gilt:
$u = 2\pi \cdot r$
Aufgelöst nach *r*:

$$\frac{u}{2\pi} = r$$

Das Ergebnis wird in die Formel für den Flächeninhalt *A* eingesetzt:

$$A = r^2\pi = \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{u^2}{4\pi^2} \cdot \pi = \frac{u^2}{4\pi} = \frac{(1m)^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} m^2$$

$$\approx 0{,}0796\, m^2 = 7{,}96\, dm^2$$

Der maximale Flächeninhalt beträgt ca. 7,96 dm².

Zusatz:
Wird die Länge der Schnur (d.h. der Umfang) verdoppelt, vervierfacht sich der Flächeninhalt (A_{neu}). Der verdoppelte Umfang wird mit *U* bezeichnet. Es gilt: $U = 2u$, und wie oben ist

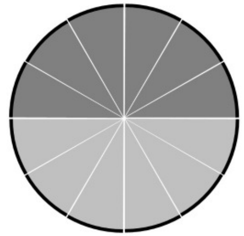
$$A_{neu} = \frac{U^2}{4\pi} = \frac{(2u)^2}{4\pi} = 4 \cdot \frac{u^2}{4\pi} = 4 \cdot A$$

Bei Verdopplung der Schnurlänge vervierfacht sich der Flächeninhalt.

Flächeninhalt

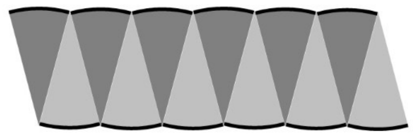
Eine kreisförmige Pizza (vgl. Station 4) wurde in zwölf Stücke zerlegt und neu geordnet.

Lösungsvorschlag:

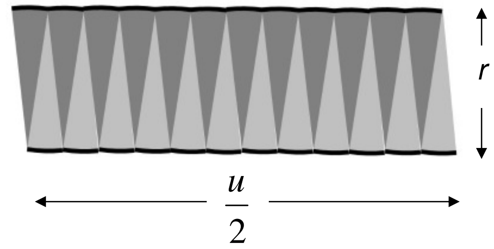


Wir betrachten die Pizza von oben. Für den Umfang gilt: $u = 2\pi \cdot r$

Nun ordnen wir die Teilstücke neu an:



Hätten wir die Pizza in 24 Stücke geteilt, sähe das Ergebnis schon fast wie ein Rechteck aus:



Würde man die Pizza in unendlich viele Stücke schneiden, würde sich ein Rechteck ergeben (→ Infinitesimalrechnung). Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich Länge mal Breite:

$$A = r \cdot \frac{u}{2} = r \cdot \frac{2\pi \cdot r}{2} = r \cdot \pi \cdot r = r^2 \cdot \pi.$$

Damit gilt für den Flächeninhalt eines Kreises $A = r^2 \cdot \pi$.