

Martin Kramer

# Mathematik als Abenteuer

Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Erleben wird zur Grundlage des Unterrichts



Leseprobe



Klett

Kallmeyer



Martin Kramer

# *Mathematik als Abenteuer*

---

*Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung*

Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens



Leseprobe

**Klett | Kallmeyer**



**Martin Kramer**, geb. 1973, Vater, Leiter der Didaktik der Mathematik an der Universität Freiburg, Theaterpädagoge (Bundesverband Theaterpädagogik), 2003–2012 Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik. Zahlreiche Publikationen und Lehrerfortbildungen zu handlungs- und erlebnisorientierter Didaktik, Konstruktivismus, angewandter Systemtheorie und unterrichtlicher Kommunikation. Zusammenarbeit mit dem Kultusministerium Baden-Württemberg, mit Mathe.Forscher, dem Schultheater-Studio Frankfurt u. v. m. – Weitere Informationen unter [www.unterricht-als-abenteuer.de](http://www.unterricht-als-abenteuer.de).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

## Impressum

Leseprobe aus:  
Martin Kramer  
Mathematik als Abenteuer  
Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung

3. Auflage 2016

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

© 2016. Kallmeyer in Verbindung mit Klett  
Friedrich Verlag GmbH  
D-30926 Seelze  
Alle Rechte vorbehalten.  
[www.friedrich-verlag.de](http://www.friedrich-verlag.de)

Redaktion: Gesine Bechtloff, Tiefenbronn  
Fotos: Martin Kramer, Tübingen  
Realisation: Bernd Burkart, Weinstadt-Baach  
Druck der Leseprobe: Zimmermann Druck+Verlag GmbH, Widukindplatz 2, 58802 Balve  
Printed in Germany

ISBN: 978-3-7800-4847-9

# Inhaltsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| <b>Geleitwort</b> . . . . .  | 11 |
| <b>Vorwort</b> . . . . .   | 13 |
| <br>   |    |
| <b>Teil VI: Analysis</b> . . . . .   | 17 |
| <br>   |    |
| <b>19 Einführung in Koordinatensysteme und Funktionen</b> . . . . .                    | 18 |
| 19.1 Adressierung des Raumes:<br>Erste Schritte im Koordinatensystem . . . . .         | 18 |
| 19.2 Schiffe versenken und Koordinaten . . . . .                                       | 27 |
| 19.3 Verschiedene Koordinatensysteme im Raum . . . . .                                 | 28 |
| 19.4 Die Funktion als „Black Box“ . . . . .  | 28 |
| 19.5 Funktionsvorschriften erraten . . . . .   | 31 |
| <br>   |    |
| <b>20 Bewegungsabläufe aufzeichnen</b> . . . . .                                       | 33 |
| 20.1 Mathematik beginnt mit dem Lesen einer Uhr . . . . .                              | 33 |
| 20.2 Wachstum von Kresse . . . . .   | 34 |
| 20.3 Der Weg einer Ameise oder Zeit-Weg-Diagramme . . . . .                            | 42 |
| 20.4 Bewegungsabläufe mit Figurentheater . . . . .                                     | 46 |
| 20.5 Nachstellen von $t$ - $s$ -Diagrammen . . . . .                                   | 48 |
| 20.6 Emotionale Erweiterung:<br>eine Liebesgeschichte und ein Überholvorgang . . . . . | 51 |
| 20.7 Lineare Zuordnungen – Funktionen im Glas . . . . .                                | 54 |
| 20.8 Weitere Funktionen im Glas . . . . .  | 55 |
| <br>   |    |
| <b>21 Schaubilder handelnd verstehen</b> . . . . .                                     | 60 |
| 21.1 Schaubilder als Standbilder . . . . .   | 60 |
| 21.2 Lineare Funktionen und materielles Abfragen . . . . .                             | 65 |
| 21.3 Schüler als Punkte im Schaubild . . . . .   | 67 |
| 21.4 Teamtraining mit Schaubildern . . . . .   | 70 |
| 21.5 Schaubilder in $x$ -Richtung verschieben . . . . .                                | 80 |
| 21.6 Verkettung von Funktionen –<br>Funktionen umarmen sich . . . . .                  | 82 |
| 21.7 Sind Verkettungen vertauschbar? . . . . .   | 82 |
| 21.8 Umkehrfunktionen und Logarithmus . . . . .  | 84 |
| 21.9 Eine verbal-nonverbale Abfragetechnik<br>am Beispiel des Logarithmus . . . . .    | 88 |
| 21.10 Das Schaubild der Umkehrfunktion . . . . .                                       | 90 |
| 21.11 Mehrdimensionale Funktionen . . . . .  | 94 |

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| <b>22</b> | <b>Differentialrechnung</b>   | 101 |
| 22.1      | Steigung einer Treppe   | 101 |
| 22.2      | Infinitesimalrechnung und der Grenzwert als Zaun  | 104 |
| 22.3      | Figurentheater an der Tafel   | 106 |
| 22.4      | Kurvendiskussion mit dem Spielzeugauto:<br>die Ableitung als Geschwindigkeit                    | 109 |
| 22.5      | Abgefahrte Kurvendiskussion   | 113 |
| 22.6      | Die zweite Ableitung: ein Aufziehauto   | 118 |
| 22.7      | Ein reales Extremwertproblem:<br>Wer bekommt am meisten Popcorn?                                | 120 |
| 22.8      | Weitere extremale Körper  | 123 |
| 22.9      | Komplexe und offene Fragestellungen   | 124 |
| 22.10     | Lernen in Stationen – sieben Extremwertaufgaben   | 126 |
| <b>23</b> | <b>Exponentialfunktionen und Wachstum</b>   | 129 |
| 23.1      | Potenzen schmecken  | 130 |
| 23.2      | Zufall, radioaktiver und exponentieller Zerfall   | 136 |
| 23.3      | Experimente filmen  | 144 |
| 23.4      | Eine Tasse Tee und das beschränkte Wachstum   | 147 |
| 23.5      | Logistisches Wachstum   | 150 |
| <b>24</b> | <b>Projektion einer Drehung:<br/>Sinus- und Kosinusfunktion</b>                                 | 153 |
| 24.1      | Die Idee der Projektion   | 154 |
| 24.2      | Informationsverlust durch Projektion  | 156 |
| 24.3      | Jeder sieht, was er sehen will:<br>Daumenkino einer Drehbewegung                                | 159 |
| 24.4      | Der Bleistift wird zum Zeiger   | 165 |
| 24.5      | Materielle Konstruktion der Sinus-<br>bzw. Kosinusfunktion                                      | 167 |
| 24.6      | Exkurs für höhere Klassen:<br>die Gleichungen $\cos(-x) = \cos(x)$<br>und $\sin(-x) = -\sin(x)$ | 173 |
| 24.7      | Die Sinusfunktion in Kürze  | 178 |
| 24.8      | Die Sinusfunktion mit dem Fahrrad   | 181 |
| 24.9      | Trigonometrie mit dem Bleistift   | 185 |
| 24.10     | Überlagerung von Sinusschwingungen  | 190 |
| 24.11     | Die Ableitung der Sinusfunktion   | 192 |
| 24.12     | Ästhetik einer Formel   | 196 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Teil VII: Zufall und Wahrscheinlichkeit</b> . . . . .  | 201 |
| <b>25 Wahrscheinlichkeit</b> . . . . .  | 202 |
| 25.1 Ungerechtigkeit mit Gummibärchen<br>oder das Spiel „Catan“ . . . . .                           | 203 |
| 25.2 „Gesetz“ der großen Zahlen . . . . .   | 207 |
| 25.3 Gesetz der großen Zahlen oder<br>das Knacken geheimer Botschaften . . . . .                    | 208 |
| 25.4 Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren . . . . .  | 216 |
| 25.5 Lotto im Klassenraum . . . . .   | 222 |
| 25.6 Gleiche Mathematik, anderes Erscheinungsbild:<br>„4 aus 6“ . . . . .                           | 233 |
| 25.7 Lotto in Kürze . . . . .   | 234 |
| 25.8 Ziehen mit Zurücklegen: Bingo . . . . .  | 236 |
| 25.9 Ziehen ohne Zurücklegen:<br>Kombinatorik mit Münzen und Stühlen . . . . .                      | 237 |
| 25.10 Überblick über Kombinatorik . . . . .   | 243 |
| 25.11 Das Klassenzimmer als Spielcasino . . . . .   | 243 |
| 25.12 Gegenereignis oder die Häufigkeit von Geburtstagen .  | 253 |
| 25.13 Additionssatz . . . . .   | 257 |
| 25.14 De Morgan'sche Gesetze . . . . .  | 260 |
| 25.15 Bedingte Wahrscheinlichkeiten,<br>Unabhängigkeit und Stichproben . . . . .                    | 261 |
| 25.16 Hilft es, Münzen am Automaten zu reiben? . . . . .  | 264 |
| 25.17 Vom Pascalschen Dreieck zur Binominalverteilung . .   | 266 |
| 25.18 Erwartungswerte . . . . .   | 274 |
| <b>Teil VIII: Abenteuer kennen keine Grenzen</b> . . . . .  | 285 |
| <b>26 Schulmathematik am Rande des Bildungsplanes</b> . . .   | 286 |
| 26.1 Was ist ein mathematischer Satz? . . . . .   | 286 |
| 26.2 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion . . . .  | 288 |
| 26.3 Beispiele zur vollständigen Induktion . . . . .  | 291 |
| 26.4 Das Mönchproblem oder die Suche nach einem Kommu-<br>nikationssystem als Algorithmus . . . . . | 299 |
| 26.5 Ein Irrgarten für Blinde:<br>lokale und globale Sichtweisen . . . . .                          | 304 |
| 26.6 24 Stunden Mathematik . . . . .  | 311 |
| 26.7 Ein Psychotest: Bin ich mathematisch? . . . . .  | 313 |
| 26.8 Mathematik. Wozu überhaupt? . . . . .  | 315 |
| <b>Nachwort für Abenteurer</b> . . . . .  | 321 |
| <b>Literatur</b> . . . . .  | 322 |
| <b>Sachverzeichnis</b> . . . . .  | 323 |

## Auszug aus dem Geleitwort von Prof. Dr. sc. math. Peter Gallin

Kennen Sie „Play Bach“? Was der französische Pianist Jacques Lousier mit der Musik von Johann Sebastian Bach macht, ist Martin Kramer für die Mathematik gelungen. Er hebt verborgene Schichten der Mathematik mit Konsequenz und Präzision für die breite Öffentlichkeit ans Licht, so wie Jacques Lousier zeigt, welcher Charakter in Bachs Musik steckt: Wesenszüge, die wohl nur wenigen Personen wirklich bekannt sind. Mit leichtfüßiger Sprache spricht Martin Kramer zu uns und bietet zunächst einmal spannende Unterhaltung, die aber von Zeit zu Zeit in ganz ernsthafte Botschaften zum Mathematikunterricht übergeht.

Die neueren didaktischen und pädagogischen Erkenntnisse fließen im Grundkonzept des Buches ganz selbstverständlich ein. Konsequenterweise werden Bruners drei Repräsentationsebenen für mathematische Sachverhalte eingesetzt. Handlungen (Enaktives), Bilder (Ikonisches) und Formales (Symbolisches) werden immer simultan und nicht hierarchisch in attraktive Lernumgebungen eingebunden (EIS-Prinzip). Sie geben damit allen Lernenden die Möglichkeit, in der Mathematik Tritt zu fassen und etwas zu verstehen. Um den sogenannten kompetenzorientierten Unterricht muss man sich dann gar nicht mehr kümmern, denn alle Kompetenzen, die heute gefordert werden, entwickeln sich gleichsam von selbst. (...)

Schließlich wird das Fachliche sorgfältig durchdrungen und die wirklich schwierigen und wesentlichen Dinge werden auf allen drei Repräsentationsebenen breit behandelt und ausgehandelt. So fügt sich alles im „Wir“ zusammen. Es geht also nicht um Rosinen der Mathematik, sondern um den Stoff, der im Lehrplan festgeschrieben ist. Ziel ist es, mit möglichst wenig Vorgaben auszukommen, gleich mit etwas Komplexem zu starten, mit Spiel und Spaß an der Sache zu arbeiten und so zu den zentralen Einsichten vorzustoßen. Damit gelingt es, die Autonomie der Lernenden zu fördern und zu stärken, ihnen das Gefühl der sozialen Zugehörigkeit zu vermitteln und ihnen zur mathematischen Fachkompetenz zu verhelfen. (...)

Es sind nicht einfach Rezepte für die Lehrperson, die Martin Kramer hier vorstellt, sondern Vorschläge für eine neue Grundhaltung dem Stoff und den Lernenden gegenüber. Es ist dem Buch zu wünschen, dass es zu einer Veränderung im Mathematikunterricht beiträgt, welche die Motivation aller Beteiligten erhöht, nachhaltige Erlebnisse ermöglicht und fundiertes Wissen über Mathematik erzeugt.

Teil VI

## Analysis

Kapitel 20

### Bewegungsabläufe aufzeichnen

In diesem Kapitel geht es um die Aufzeichnung einer realen (eindimensionalen) Begebenheit. So werden Wachstumsvorgänge, Bewegungsabläufe oder das Befüllen von Gläsern mit Hilfe von Schaubildern aufgezeichnet. Die zugehörige Funktionsvorschrift ist in den meisten Fällen unbekannt und das ist für den Einstieg ganz geschickt: Erstens ist der Ansatz wesentlich allgemeiner, als wenn man mit linearen Funktionen beginnt, und zweitens lenken keine Rechnungen vom wesentlichen Verständnis ab.

Der Ansatz mit  $t$ - $s$ - bzw. mit  $t$ - $v$ -Diagrammen führt sehr weit. In Abschnitt 22.5 wird damit in die Differentialrechnung eingeführt.

allgemeiner Einstieg  
ohne Rechnungen

#### 20.1 *Mathematik beginnt mit dem Lesen einer Uhr*

In diesem Kapitel stehen  $t$ - $s$ -Diagramme im Mittelpunkt. Formal passiert nichts anderes, als wenn man  $x$ - $y$ -Diagramme betrachtet. Es ist ein guter Weg, weil er sofort eine Anwendung aufzeigt. Und trotz-





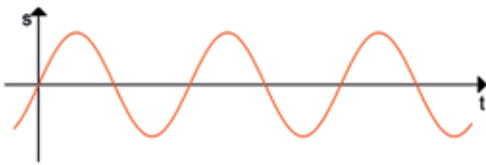
Zeit ist unsichtbar

dem erfordert es eine höhere Abstraktion: Die Zeit kann man nicht sehen. Uns Menschen fällt es schwer, in zeitlichen Abläufen zu denken. Daher stellen wir gerne Zeitpunkte oder zeitliche Entwicklungen räumlich dar. Wir haben Instrumente entwickelt, die zeitliche Abläufe räumlich darstellen.

Wir sprechen von *Zeitpunkten*, *Zeitabschnitten* und *Zeitfenstern* und denken dabei bereits räumlich. Das verwundert nicht, wenn wir bedenken, dass wir die meisten Informationen, die wir tagtäglich aufnehmen, *sehen*. Und weil wir die Zeit nicht direkt sehen können, wandeln wir sie in etwas um, was wir mit den Augen wahrnehmen können. Es gibt zig verschiedene Ausführungen von Uhren, alle haben eines gemein: Sie stellen Zeit räumlich dar.

Eine Uhr zu lesen ist nicht einfach. Was man sieht, ist ja nicht die Zeit, es ist ja nur die Darstellung von Zeit! Wenn Kinder im Grundschulalter lernen, wie man eine Uhr liest, entspricht das der Interpretation eines  $t$ - $s$ -Diagrammes.

Im Diagramm ist keine Hügellandschaft dargestellt, sondern eine Pendelbewegung. Ein kleines Kind kann das noch nicht verstehen. Es sieht Wellen oder Berge und Täler. Es erfordert ein Abstraktionsvermögen, in diesem Bild (Schaubild) eine Hin- und-her-Bewegung zu sehen, die durch eine  $t$ -Achse räumlich aufgelöst wird. Die Zeitachse entspricht der fortschreitenden Zeit, einer Zeitaufzeichnung, kurz: einer Uhr!



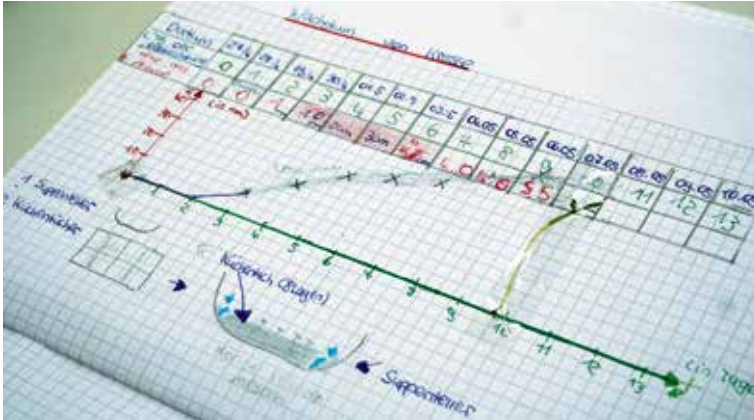
## 20.2 Wachstum von Kresse

Über einen Zeitraum von zwei Wochen wird das Wachstum von Kresse beobachtet und als Graph dargestellt.



Vorbereitung

Im Unterricht werden Kressesamen verteilt. Jeder Schüler erhält ca. einen halben Teelöffel, den er in ein selbstgebasteltes Papiertütchen füllt.



Ins Schulheft werden eine Tabelle und ein großes Koordinatensystem gezeichnet. Im Bild wurde entsprechend einer Fußgängerampel (unten „grün“, oben „rot“) für die Zeit ( $t$ -Achse) Grün und die Höhe ( $h$ -Achse) Rot verwendet. Die Spaltenbreite der Tabelle beträgt 1,5 cm und sollte mit der Einheit der Achsen übereinstimmen, so dass die Tabelleneinträge genau über dem jeweiligen Tag stehen.

|                        |   |   |   |   |   |   |   |     |
|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| Datum                  |   |   |   |   |   |   |   |     |
| Tag der Beobachtung    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| Höhe der Pflanze in mm | 0 |   |   |   |   |   |   |     |

Wer noch nie einen Vorgang über längere Zeit beobachtet hat, weiß die zusätzliche Datumsangabe wahrscheinlich nicht zu schätzen. Mitunter weiß man am nächsten Tag nicht sicher, ob man das Wachstum vermessen hat oder nicht. Falls tatsächlich einmal ein Tag vergessen wurde, so bleibt dieser frei.

Am Tag 0 sind natürlich alle „Pflanzen“ gleich hoch, daher kann bereits im Unterricht der erste Eintrag in die Tabelle erfolgen. Schließlich zeichnet jeder Schüler in das leere Diagramm seinen vermuteten Wachstumsverlauf als Kurve ein. Die fiktive Vorhersage steigert das Interesse: Man kann sich nur dann überraschen lassen, wenn man sich zuvor Gedanken gemacht hat.

fiktive Vorhersage

### *Anbau der Kresse*

Gepflanzt wird zu Hause in einem Suppenteller auf mindestens acht Lagen Küchenpapier, alternativ geht auch Toilettenpapier. Auf das mit Wasser getränkte Papier werden die Samen gestreut.



fixer Beobachtungszeitpunkt

Der Standort der Kresse sollte während der Beobachtung nicht verändert werden, ebenso nicht der Beobachtungszeitpunkt. Am besten pflanzt man daher die Kresse am Abend, vielleicht kurz bevor man zu Bett geht.

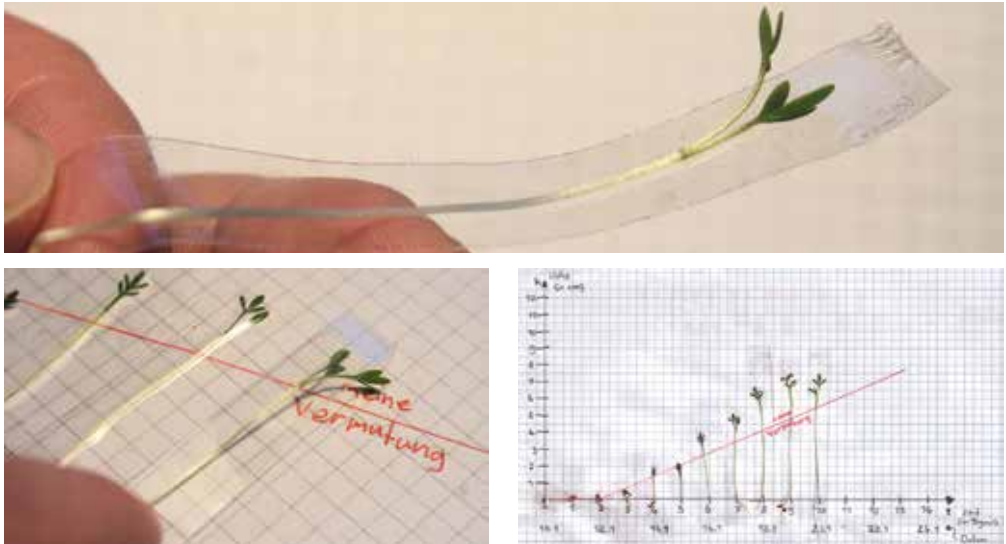
### *Beobachtung des Wachstums*

An jedem Tag wird die durchschnittliche Höhe des „Kressewäldchens“ in die Tabelle eingetragen. Stärker als „nur“ zu messen und Kreuzchen in das Schaubild einzutragen ist es, wenn jeden Tag ein ty-



pischer Repräsentant ausgewählt und ins Heft eingeklebt wird. Dementsprechend wird am Tag null ein Kressesamen fixiert.

Wenn die Pflanzen größer werden, können sie zuerst auf dem Klebestreifen fixiert bzw. gerade gezogen und dann eingeklebt werden.



**Bemerkungen, Hintergründe und Erweiterungen**

*Grüne und rote Achsen*

Die Farbkodierung grün-rot legt zusammen mit dem Bild der Ampel eine Aufteilung in Oben und Unten nahe: Die untere „grüne“ Zeit wird auf die „rote“ Pflanzenhöhe nach oben abgebildet. – Die Übung in Abschnitt 20.3 geht noch einen Schritt weiter: Dort werden Zeit und Ort nicht nur unterschiedliche Farben, sondern auch unterschiedliche Rollen gegeben.

*EIS-Prinzip*

Vermittelt wird auf drei Ebenen des EIS-Prinzips nach Bruner:

|  |   |  |       |       |       |       |   |   |   |   |     |   |     |   |
|--|---|--|-------|-------|-------|-------|---|---|---|---|-----|---|-----|---|
|  |   | <table border="1"> <tr> <td>03.05</td> <td>04.05</td> <td>05.05</td> <td>06.05</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4.5</td> <td>5</td> <td>5.5</td> <td>6</td> </tr> </table> | 03.05 | 04.05 | 05.05 | 06.05 | 6 | 7 | 8 | 9 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 |
| 03.05  | 04.05   | 05.05  | 06.05 |       |       |       |   |   |   |   |     |   |     |   |
| 6  | 7   | 8  | 9     |       |       |       |   |   |   |   |     |   |     |   |
| 4.5  | 5   | 5.5  | 6     |       |       |       |   |   |   |   |     |   |     |   |
| <p>Enaktiv (handelnd):<br/>Kressewachstum zu Hause</p> | <p>Ikonisch (bildhaft):<br/>Kressepflanzen gepresst im Heft</p> | <p>Symbolisch (formal):<br/>Tabelleneinträge</p>   |       |       |       |       |   |   |   |   |     |   |     |   |

gestaltpsychologische  
Verknüpfung

Die verschiedenen Ebenen sind mit Hilfe gestaltpsychologischer Gesetze miteinander verknüpft. So ist z. B. die ikonische Ebene mit der symbolischen über das Gesetz der Ähnlichkeit (Farbkodierung) verbunden. Da das Ernten eines Pflänzchens mit dem Einkleben und dem Tabelleneintrag zeitlich zusammenfällt, werden alle drei (!) Ebenen mit dem Gesetz der Gleichzeitigkeit zusätzlich verknüpft. Dingen, die gleichzeitig geschehen, wird unmittelbar ein Zusammenhang unterstellt.<sup>1</sup>

#### *Erweiterung ins Abstrakte*

Nach dem Experiment kann der Lehrer unterschiedliche Schaubilder an die Tafel zeichnen und nach dem Wachstum der Pflanze fragen. Bei mir lachten die Schüler, als ich eine Welle (Sinus) zeichnete: Ab einem bestimmten Zeitpunkt wächst die Pflanze rückwärts, und nicht auf die Höhe null, sondern sie gräbt sich auch noch unter die Erde ein. Man überlege sich die Bedeutung: Die Schüler geben durch Lachen die Rückmeldung, dass sie das Wesentliche verstanden haben. Ein hübsches Beispiel für nonverbale Kommunikation!

Rückmeldung  
durch Lachen

#### *Material ist fächerübergreifend*

Wenn man mit Material arbeitet, berührt man prinzipiell immer andere Fächer. Verschiedene Fächer bzw. Disziplinen stellen ja nur unterschiedliche Perspektiven dar, aus denen beobachtet wird. So kann das Wachstum von Kresse auf Biologie (Was braucht eine Pflanze zum Wachsen?), Physik (Wachstumsgeschwindigkeit), Religion (Der Mensch braucht Nahrung), Mathematik, Erdkunde (In welchen Erdteilen kann Kresse wachsen?), Deutsch (Beschreibung der Vorgehensweise) ... projiziert werden.

unterschiedliche  
Perspektiven

Man kann es auch anderes herum sehen: Alle Projektionen vereinen sich im Material. Aus diesem Grund ist der Umgang mit Material immer fächerübergreifend. Und zwar nicht deswegen, weil er künstlich geschaffen wurde, sondern weil er natürlich ist. Die unterschiedlichen Disziplinen haben sich mehr und mehr vom Konkreten, dem Materiellen, distanziert. Und so besteht natürlich die Gefahr, dass für den Schüler das Wachstum in Mathematik nichts mit Biologie oder Physik zu tun hat.

---

<sup>5</sup> Das geschieht auch, wenn kein Zusammenhang existiert: Es klingelt an der Tür und ein Glas fällt herunter. Aus didaktischer Sicht ist ein Bezug nicht immer erwünscht, aber die Bildung eines Bezuges liegt aus konstruktivistischer Sicht in der Macht des Lernenden. Anders formuliert: Wenn zwei Dinge gleichzeitig stattfinden, dann wird man als Lehrer schwer die Konstruktion eines Bezuges im Schülerhirm verhindern können ...

*Kompetenzorientierung*

Durch konkretes Handeln werden viele Kompetenzen gefördert und zwar von selbst. Wenn Sie wollen, können Sie in der Übersicht zunächst die unterste Zeile abdecken, sich überlegen, welche Kompetenzen in diesem Unterricht eine Rolle spielen, und Ihre eigenen Kreuzchen setzen.

| Sozialkompetenz         |                               |               | Methodenkompetenz |                      |                        |                    | Personale Kompetenz |                 |                         |                         | Kognitive Basiskompetenz        |               |                          |                                   | Berufsfeldbezogene Kompetenz      |                               |                                |                               |                                    |
|-------------------------|-------------------------------|---------------|-------------------|----------------------|------------------------|--------------------|---------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| Kommunikationsfähigkeit | Kritik- und Konfliktfähigkeit | Teamfähigkeit | Planungsfähigkeit | Problemlösefähigkeit | Präsentationsfähigkeit | Durchhaltevermögen | Selbstständigkeit   | Ordnentlichkeit | Verantwortungsfähigkeit | Konzentrationsfähigkeit | Räumliches Vorstellungsvermögen | Merkfähigkeit | Schlussfolgerndes Denken | Handwerklich-technische Fähigkeit | Untersuchend-forschende Fähigkeit | Kreativ-sprachliche Fähigkeit | Pädagogisch-helfende Fähigkeit | Führend-verkaufende Fähigkeit | Kaufmännisch-verwaltende Fähigkeit |
| x                       | (x)                           | (x)           | x                 | x                    | x                      | x                  | x                   | x               | x                       | (x)                     | x                               |               | (x)                      | x                                 | x                                 |                               | (x)                            |                               | x                                  |

Vielleicht hätten Sie das ein oder andere Kreuzchen anders gesetzt, wesentlich ist jedoch: Wenn man den Schüler in seiner Lebenswelt in den Mittelpunkt stellt, würde man sich in einer handlungs- und erlebnisorientierten Didaktik sehr schwer damit tun, Kompetenzen *nicht* zu schulen. Die gute Nachricht: Sie müssen nicht „zu Kreuze“ kriechen, wenn Sie kompetenzorientiert unterrichten. Die Kompetenzorientierung ist in diesem Unterrichtskonzept in natürlicher Weise enthalten. Versuchen Sie einmal, handlungs- und erlebnisorientiert zu unterrichten, *ohne* dabei kompetenzorientiert zu sein!

Handlungsorientierung enthält Kompetenzorientierung

*Freude am Wachstum*

Ich habe erst durch meinen Sohn erfahren, welche Freude die Aufgabe bereiten kann. Vielleicht geht es nicht jedem so, aber manch einer schaut direkt nach dem Aufstehen, ob sich etwas getan hat. Das „Gärtnern“ passt in die Unterstufe. Hier der erste und der zweite Tag:





### *Funktionsdefinition*

Zeichnet der Lehrer als Übung eine Schleife oder ein Herzchen als Schaubild ins Diagramm, sorgt das wieder für Gelächter. Die Schüler finden von selbst die Antwort, dass „die Pflanze ja nicht an einem Tag zwei verschiedene Höhen besitzen kann“. Und das ist nichts weiter als eine kindgerechte Formulierung der Eindeutigkeit im Funktionsbegriff<sup>2</sup>.

kindgerechte  
Formulierung  
der Eindeutigkeit

### *Ableitung und Wachstumsgeschwindigkeit*

Zu welchem Zeitpunkt ist die Pflanze am schnellsten gewachsen? Fragen dieser Art können leicht beantwortet werden. Bereits in der fünften oder sechsten Klasse kann auf diese Weise anschaulich eine Kurvendiskussion durchgeführt werden. So entspricht der Wendepunkt im Schaubild einem Extremum der Wachstumsgeschwindigkeit bzw. der Ableitung. Ebenso kann monotonen Wachstum angesprochen werden. Auch wenn keine Fachbegriffe verwendet werden: Es schwingen hier wesentliche Züge der Differentialrechnung mit.

Kurvendiskussion  
in der Unterstufe

### *Ernte*

Gerüche und Geschmäcke prägen sich nachhaltig ein. Ob mit dem Vesperbrot Schaubilder und Funktionen gleich mit einverleibt werden? Wohl kaum. So direkt geht es leider doch nicht. Aber zumin-

<sup>2</sup> Jedem Element einer Menge (hier: Tage) wird *genau* ein Element einer anderen Menge (hier: Pflanzenhöhe) zugeordnet.

dest wird klar ein Bezug zur Alltagswelt geschaffen. Irgendwie hat das da auf meinem Brot mit Mathematik zu tun. Und wenn das für essbare Kresse gilt, dann haben Pflanzen und Ernährung vielleicht ganz allgemein mit Mathematik zu tun.

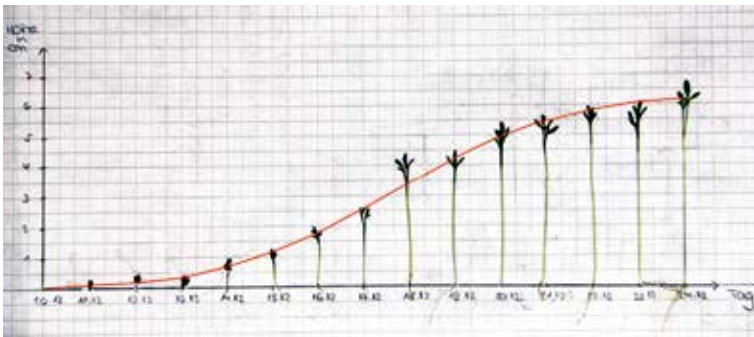
Bezug zur Alltagswelt



*Höhere Klassen – Differenzierung durch Material*

Die Übung wurde in diesem Abschnitt für die Umsetzung in der Unterstufe gezeigt. Ändert man die Fragestellung z. B. in eine mathematische Modellierungsaufgabe ab, lässt sich Kresse auch in der Sekundarstufe II anpflanzen: Wie lautet eine mögliche Funktionsvorschrift für das dargestellte konkrete Wachstum?<sup>3</sup>

Modellierungsaufgabe



Einfacher als die Modellierung ist der Bezug von mathematischen Begriffen auf das konkrete Beispiel. Was bedeutet hier Monotonie, was bedeuten Wende- und Extremstellen, was die erste, was die zweite Ableitung? Man zeichne die Wachstumsgeschwindigkeit als Funktion der Zeit auf. Hat die Fläche unterhalb der Kurve eine Bedeutung?

mathematische Begriffe aufs Beispiel beziehen

<sup>3</sup> Vgl. „Modellieren von Kressewachstum“ in Abschnitt 23.5.



„Wissen wächst. Der Lehrer ist nicht dazu da, den Stoff zu vermitteln; seine Aufgabe besteht vielmehr darin, zwischen Schülern und Wissen zu vermitteln“, so Martin Kramers didaktisches Credo. Sein erlebnispädagogisches Konzept von *Unterricht als Abenteuer* vermittelt Schülern handlungsorientiert und gruppendynamisch, wie sie Strukturen erkennen und verstehen können. Spielfreude, Kooperation und Persönlichkeitsentwicklung sind dabei die Eckpfeiler seiner konstruktivistischen Didaktik.

Band III bietet praxiserprobte Anregungen unter anderem zu folgenden Themen: **Funktionen:** Einführung in Koordinatensysteme und Funktionen; Bewegungsabläufe aufzeichnen; Schaubilder handelnd verstehen; Differentialrechnung; Exponentialfunktionen und Wachstum; Projektion einer Drehung; Sinus- und Kosinusfunktion

**Wahrscheinlichkeit:** Lotto im Klassenraum; Verschlüsselungsverfahren; Kombinatorik mit Münzen und Stühlen; Unabhängigkeit und Stichproben; Binomialverteilung u. a.

*„Das Fachliche wird sorgfältig durchdrungen und die wirklich schwierigen und wesentlichen Dinge breit behandelt. Es geht also nicht um Rosinen der Mathematik, sondern um den Stoff, der im Bildungsplan festgeschrieben ist.“*

Prof. Dr. sc. math. Peter Gallin



*Mathematik als Abenteuer* richtet sich an Lehrende, Referendare, Lehramtsstudierende sowie an Fortbildner und Fachleiter, die Anregungen für Lernumgebungen suchen und ihren Unterricht mit mehr Wertschätzung und Verantwortung auf Seiten der Schüler gestalten möchten.

*Mathematik als Abenteuer* besteht aus mehreren Bänden. **Band I:** Geometrie und Rechnen mit Größen; **Band II:** Algebra und Vektorrechnung.

